**Metamatematyka**

Krystian Zatka

Społeczna Akademia Nauk, Łódź, Polska

124048@student.san.edu.pl

**Streszczenie.** Moja praca poświęcona jest metamatematyce – dziedzinie badającej strukturę, podstawy i granice matematyki z perspektywy logicznej i formalnej. Przedstawiam w niej kluczowe pojęcia związane z tą dyscypliną, takie jak system formalny, aksjomaty, teoria dowodu oraz pojęcie struktury matematycznej. Omawiam w niej także znaczenie teorii mnogości jako fundamentu współczesnej matematyki oraz rolę teorii modeli i teorii rekursji   
w analizie formalnych systemów matematycznych.

**Słowa kluczowe:** metamatematyka, teoria, system formalny, struktura matematyczna, aksjomat

1. **Wprowadzenie**

Metamatematyka to rygorystyczne badanie podstaw matematyki i pewnych aspektów logiki matematycznej z użyciem zaawansowanych środków samej matematyki. Jedną z najważniejszych jej cech jest rozróżnienie między rozumowaniami prowadzonymi wewnątrz danej sformalizowanej teorii aksjomatycznej,   
a rozumowaniami prowadzonymi na zewnątrz niej. W powstaniu matematyki, która wyodrębniła się jako dział badań nad podstawami matematyki, kluczową rolę odegrali David Hilbert, Kurt Gödel i Alfred Tarski. Do zagadnień metamatematyki należy analizowanie takich własności teorii aksjomatycznych, jak niesprzeczność, rozstrzygalność, modele, interpretacje jednej teorii w drugiej.

Główne tradycyjne gałęzie metamatematyki to:

* Badanie aksjomatycznych systemów teorii mnogości,
* Teoria dowodu,
* Teoria modeli,
* Teoria rekursji, [1]

1. **Teoria mnogości**

Jedną z gałęzi metamatematyki jest teoria mnogości, która jest fundamentalnym działem matematyki, bada ona zbiory, zwłaszcza te nieskończone, a także jej uogólnienia jak klasy. Za początki tej teorii uznaje się koniec XIX wieku, niemiecki matematyk Georg Cantor zapoczątkował wtedy systematyczne badania zbiorów nieskończonych. Jego rozważania budziły kontrowersje, mimo to inni uczeni uznali je za niezwykle ważne. Niemiecki matematyk David Hilbert, umieścił jedno z zagadnień tej teorii na początku swojej listy 23 największych problemów stojących przed XX-wieczną matematyką. [3] Wśród nich znajdują się również między innymi: Hipoteza Riemanna, hipoteza Goldbacha, hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych, dalszy rozwój rachunku wariacyjnego. W latach 20. XXI wieku teoria mnogości dalej jest rozwijana poprzez np. seminaria. [2]

1. **Naiwna teoria mnogości**

Termin naiwna teoria mnogości odnosi się do wczesnych metod badania zbiorów, które opierały się głównie na intuicji, bez formalnego aparatu aksjomatycznego. W tym podejściu istnienia zbiorów tworzonych przez operacje takie jak suma było przyjmowane za oczywiste, bez potrzeby ich ścisłego uzasadniania. Współcześnie konstrukcje tego rodzaju wymagają już wyraźnego ujęcia w postaci aksjomatów, na przykład aksjomatu sumy. Pomimo tego, intuicyjna teoria zbiorów pozostaje wystarczająca w wielu praktycznych zastosowaniach matematyki. Odkrycie paradoksów logicznych związanych z pojęciem zbioru – w szczególności paradoksu Russella, brytyjskiego matematyka, logika, filozofa – skłoniło Ernsta Zermela, niemieckiego matematyka do zaproponowania w 1908 roku pierwszej formalnej wersji aksjomatycznej teorii zbiorów. Z czasem rozwinięto ją w system znany jako teoria Zermela-Fraenkla, który   
w uzupełnionej wersji z aksjomatem wyboru stał się standardowym fundamentem współczesnej matematyki. Choć początkowo aksjomatyzacja nie wpłynęła istotnie na sposób prowadzenia rozumowań, to jednak postępująca formalizacja oraz pojawiające się nieintuicyjne rezultaty – szczególnie te zależne od aksjomatu wyboru – skłoniły matematyków do większej refleksji nad przyjmowanymi założeniami. Przykłady takie jak twierdzenie Hausdorffa czy paradoks Banacha-Tarskiego, 1924, który ukazuje możliwość „rozbicia” kuli i złożenia z niej dwóch identycznych kopii, wywołały ożywioną debatę nad statusem i konsekwencjami stosowanych aksjomatów. [2]

1. **Teoria dowodu**

Teoria dowodu to dział logiki matematycznej zajmujący się formalnym opisem   
i analizą samego pojęcia dowodu matematycznego oraz mechanizmów jego konstruowania w ramach systemów formalnych. Za jej twórcę uznaje się Davida Hilberta, który na przełomie XIX i XX wieku dążył do ugruntowania matematyki na ścisłych podstawach aksjomatycznych. Główne cele teorii dowodu obejmują budowę logicznych systemów aksjomatycznych zdolnych do reprezentowania i formalizacji matematycznych rozumowań, a także badanie ich mocy wyrażeniowej – czyli zakresu twierdzeń, które można w danym systemie dowieść. Analizie poddaje się również strukturę dowodów formalnych, co czyni teorię dowodu istotnym narzędziem w badaniu syntaktycznych aspektów logiki. W niektórych kontekstach teoria dowodu bywa utożsamiana z syntaktyką logiki formalnej. [3]

1. **Teoria modeli**

Teoria modeli, znana również jako semantyka logiczna, stanowi dział logiki matematycznej zajmujący się badaniem relacji między teoriami aksjomatycznymi, a ich modelami, czyli strukturami, które spełniają dane zdania teorii. Wywodzi się z prac Alfréda Tarskiego i Kurta Gödla z lat 30. XX wieku. Tarski wprowadził formalne pojęcie prawdy oraz definicję spełniania formuł w modelu, co stworzyło fundament dla nowoczesnej teorii modeli. Gödel natomiast sformułował twierdzenie o pełności, pokazując, że konsekwencja syntaktyczna pokrywa się z semantyczną w logice pierwszego rzędu. Od lat 60. XX wieku teoria modeli rozwinęła własny aparat pojęciowy i metodologiczny, m.in. dzięki pracom takich matematyków jak Jerzy Łoś [twierdzenie   
o ultraproduktach], Paul Cohen [forsing i niezależność AC oraz CH], Michael Morley [kategoryczność w mocach nieprzeliczalnych] czy Saharon Shelah [hierarchia stabilności, technika forkingu]. Dziedzina ta wyodrębniła się jako autonomiczna gałąź logiki matematycznej, a jej narzędzia znalazły zastosowanie w algebrze, geometrii algebraicznej i analizie [struktury o-minimalne]. [4]

1. **Teoria rekursji**

Teoria rekursji to gałąź logiki matematycznej, której początki sięgają lat 30. XX wieku. Jej fundamenty wypracowali m.in. Alan Turing i Stephen Cole Kleene, a ich prace miały kluczowe znaczenie dla późniejszego rozwoju tej dziedziny.  
Podstawowym celem teorii rekursji jest analiza tzw. obiektów rekurencyjnych, czyli takich funkcji, relacji czy zbiorów, które można jednoznacznie opisać za pomocą precyzyjnych reguł konstrukcyjnych. Funkcje rekurencyjne to funkcje określone na zbiorze liczb naturalnych, które da się zbudować z prostych funkcji podstawowych [np. funkcji stałej czy identycznościowej] poprzez skończoną liczbę dozwolonych operacji – takich jak kompozycja funkcji czy definicje rekurencyjne. Zbiór nazywa się rekurencyjnym, jeśli jego funkcja charakterystyczna [czyli funkcja wskazująca przynależność elementu do zbioru] jest funkcją rekurencyjną.  
Funkcje tego typu są matematycznym modelem funkcji obliczalnych, czyli takich, które można wyliczyć w skończonej liczbie kroków według z góry ustalonej procedury [algorytmu]. Alternatywna – lecz równoważna – definicja mówi, że zbiór jest rekurencyjny, jeśli istnieje algorytm, który dla każdej liczby naturalnej rozstrzyga, czy dana liczba należy do tego zbioru, czy nie. Co istotne, pojęcie obliczalności nie zależy od wybranego modelu obliczeń – niezależnie od tego, czy używamy maszyn Turinga, funkcji rekurencyjnych czy innych systemów formalnych. Ta uniwersalność wyrażona jest w tezach Churcha-Turinga, które mówią, że wszystkie „rozsądne” modele obliczeń są w zasadzie równoważne.[5]

* **Hierarchie złożoności**

Poza obiektami rekurencyjnymi bada się również bardziej złożone struktury, takie jak obiekty rekurencyjnie przeliczalne [inaczej: semidecyzyjne]. Jeżeli relacja R[m1, …, mk, n1, …, nl] jest rekurencyjna, to wyrażenie „istnieją takie m1, …, mk, że  
relacja R zachodzi” może być prawdziwe dla niektórych wartości parametrów n1, …, nl. Tego typu relacje, w których pewna część danych jest „egzystencjalnie domknięta”, są właśnie przykładem relacji rekurencyjnie przeliczalnych.  
Dodając kolejne kwantyfikatory [ogólne i egzystencjalne] w naprzemiennej kolejności, można tworzyć relacje o coraz wyższym poziomie złożoności. Powstaje w ten sposób tzw. hierarchia arytmetyczna, która klasyfikuje obiekty według ich strukturalnej złożoności logicznej. Poziomy tej hierarchii oznacza się liczbami naturalnymi i każdy z nich reprezentuje określony stopień trudności w rozstrzyganiu przynależności elementów.  
Idąc dalej, możliwe jest rozszerzenie hierarchii arytmetycznej do jeszcze bardziej ogólnej **hierarchii analitycznej**, która obejmuje obiekty nieujęte w pierwszej klasyfikacji. Teoria rekursji bada strukturę takich hierarchii, a także zadaje pytania   
o charakterze metamatematycznym, jak na przykład: „jak bardzo złożony jest dany zbiór?”, „na jakim poziomie hierarchii się znajduje?”, albo „czy dana hierarchia stabilizuje się na pewnym poziomie?”. Chociaż pytanie te bywają pozornie proste, ich rozwiązanie nierzadko wymaga bardzo zaawansowanych narzędzi teoretycznych.  
Współczesna teoria rekursji jest wysoce sformalizowaną i specjalistyczną dziedziną, którą aktywnie rozwija stosunkowo wąska grupa badaczy.[5]

* **Zastosowania informatyczne**

Z teorii rekursji wyłoniła się w drugiej połowie XX wieku **teoria obliczeń**, stanowiąca dziś fundament informatyki teoretycznej. Wnioski płynące z tej dziedziny mają praktyczne zastosowanie, m.in. w projektowaniu **systemów zabezpieczeń komputerowych**.  
Kluczowym założeniem takich systemów jest to, że złamanie zabezpieczeń powinno wymagać bardzo dużego nakładu czasu obliczeniowego – najlepiej takiego, którego nie da się ograniczyć do wielomianu względem rozmiaru danych wejściowych.  
To zagadnienie związane jest z nierozstrzygniętą dotąd **hipotezą P = NP**, która pyta, czy każdy problem, którego poprawność rozwiązania można szybko zweryfikować, da się również szybko rozwiązać. Odpowiedź na to pytanie ma fundamentalne znaczenie nie tylko dla informatyki, ale i dla całej matematyki obliczeniowej.[5]

1. **Aksjomaty**

Aksjomat, nazywany również postulatem lub pewnikiem to jedno   
z podstawowych pojęć w logice matematycznej. Tradycyjnie, począwszy od czasów Euklidesa, aksjomaty rozumiano jako twierdzenia uznawane za prawdziwe bez konieczności ich dowodzenia w ramach danej teorii. W ujęciu współczesnym definicja aksjomatu została doprecyzowana określając aksjomaty jako zdania wybrane spośród twierdzeń danej teorii w taki sposób, by można było wyprowadzić z nich wszystkie pozostałe twierdzenia tej teorii. Taki uporządkowany zestaw aksjomatów nazywamy aksjomatyką. Razem   
z twierdzeniami będącymi logicznymi konsekwencjami aksjomatów tworzy on system aksjomatyczny.

Co ciekawe, jedną teorię można zaksjomatyzować na różne sposoby. Dla geometrii euklidesowej mamy np. klasyczne aksjomaty Euklidesa, ale także nowsze wersje zaproponowane przez Hilberta i von Neumanna. Dwie ostatnie są równoważne, czyli można z jednej wyprowadzić drugą, ale aksjomaty Euklidesa są „słabsze” – nie wystarczają do opisania całej teorii. Przykład twierdzenia, którego nie da się uzyskać tylko z aksjomatów Euklidesa, to twierdzenie Pappusa-Pascala.

Matematyka składa się z różnych teorii, takich jak geometria euklidesowa czy arytmetyka. Każda z tych teorii korzysta z własnego zestawu pojęć i reguł. Mówi się, że teoria jest zapisana w specyficznym języku, który bazuje na ustalonym alfabecie symboli. Na przykład w geometrii takim „alfabetem” mogą być symbole oznaczające:

* Że coś jest punktem [np. zapis „Pu[x]” – jeśli zdanie to jest prawdziwe,  
  to x oznacza punkt],
* Że coś jest prostą [np. „Pr[x]”],
* Albo że jakiś punkt leży na danej prostej [np. „L[I, P]” – czyli punkt P leży na prostej I],

W starszych podejściach do logiki matematycznej takie pojęcia jak punkt, prosta czy relacja „leży na” były traktowane jako podstawowe, niepodlegające dalszej definicji.  
Obecnie częściej podchodzi się do nich jako do symboli, których znaczenie ustala się dopiero w kontekście konkretnego modelu teorii.  
W ramach danej teorii nie definiuje się formalnie tych symboli na samym początku – ważne jest jedynie to, że każde zdanie z ich użyciem może być prawdziwe albo fałszywe dla danego obiektu. Sens tych symboli ustala się później, gdy buduje się konkretny model, który odzwierciedla teorię.

Teoria logiczna to zbiór twierdzeń opisujących relacje między pojęciami używanymi  
w danym języku. Technicznie rzecz biorąc, są to zdania zapisane za pomocą symboli tej teorii oraz symboli logicznych [takich jak spójniki czy kwantyfikatory].  
Przykład takiego twierdzenia geometrycznego brzmi: „Przez dwa punkty można poprowadzić prostą.”  
Można je zapisać formalnie jako:  
Pu[A] ∧ Pu[B] ⇒ ∃l [Pr[l] ∧ L[l, A] ∧ L[l, B]]  
To znaczy, że jeśli A i B są punktami, to istnieje taka prosta I, że A i B leżą na tej prostej.

Z punktu widzenia logiki, aksjomat to dowolne zdanie [formuła], które nie prowadzi do sprzeczności, a zapisane jest w języku danej teorii. W praktyce jednak przyjmuje się tylko takie zdania, które są zawsze prawdziwe w tej teorii [czyli są tautologiami - tautologia to wyrażenie językowe, w którym poszczególne wyrazy powtarzają swoje znaczenie, tworząc redundantne połączenia], nie są ze sobą sprzeczne i spełniają swoje warunki wspomniane wcześniej. Zazwyczaj aksjomatyka jest też kategoryczna, czyli określa teorię jednoznacznie.[6]

1. **Struktury matematyczne**

Struktura matematyczna to jedno z kluczowych pojęć w matematyce, choć jej definicja może się różnić w zależności od kontekstu i konkretnej teorii. Zazwyczaj mówi się o strukturze zbudowanej na pewnym zbiorze X, który pełni rolę nośnika tej struktury.  
Często rozważa się je w ramach tzw. teorii modeli.

Można wyróżnić kilka głównych typów struktur matematycznych:

* Struktury algebraiczne – to takie struktury, które zawierają tylko działania i symbole stałe [bez dodatkowych relacji]. Są one przedmiotem badań m.in. w algebrze uniwersalnej. Przykładem może być struktura grupy na zbiorze G. Sam zbiór G nie jest jeszcze grupą – staje się nią dopiero, gdy określimy na nim działanie spełniające odpowiednie aksjomaty [takie jak łączność, istnienie elementu neutralnego i odwrotnego]. Grupę można też sformalizować jako trójkę: działanie dwuargumentowe [np. mnożenie], funkcję przypisującą każdemu elementowi jego odwrotność oraz element neutralny [stałą funkcję, przypisującą zawsze ten sam element]. Ważne są szczególnie struktury algebraiczne definiowalne równościowo, czyli takie, których aksjomaty mają postać równości bez użycia kwantyfikatorów egzystencjalnych. Przykładami są struktury grup, ciał, pierścieni, krat czy grup abelowych.
* Struktury porządkowe – to takie struktury, w których kluczowe są relacje uporządkowania, np. porządek częściowy. Dla zbioru X i relacji ≤, to para [X, ≤] tworzy strukturę porządkową. Jednym z przykładów jest krata, w której dla dowolnych dwóch elementów można wskazać ich największy wspólny dolny kres [infimum] i najmniejszy wspólny górny kres [supremum].
* Struktury topologiczne – to takie struktury, w których kluczowa jest topologia, czyli zbiór zbiorów otwartych na danym zbiorze X. Klasycznym przykładem jest przestrzeń topologiczna. Do tego typu struktur zaliczają się też np. przestrzenie jednostajne, w których bada się pojęcia takie jak zbieżność czy ciągłość.
* Struktury mieszane – te struktury mają dwa główne typy:
* Pierwszy typ to połączenie co najmniej dwóch wcześniej wspomnianych struktur, np. grupa topologiczna [czyli zbiór, na którym jest określona zarówno topologia, jak i działanie grupowe], albo ciało uporządkowane. Elementy takiej struktury są budowane z elementów zbioru X i jego podzbiorów przy użyciu narzędzi teorii mnogości.
* Drugi typ obejmuje struktury, które zawierają również obiekty spoza zbioru X, np. liczby rzeczywiste R w przestrzeni metrycznej czy ciało C w przestrzeni liniowej. W tych przypadkach elementy struktury nie wynikają z samego zbioru X.[7]

1. **System formalny**

System formalny to uporządkowany zbiór elementów, obejmujący język, zestaw aksjomatów oraz reguły wnioskowania. Może być rozumiany zarówno jako czysto abstrakcyjna konstrukcja logiczna, jak i jako narzędzie do opisu rzeczywistości – na przykład w naukach ścisłych. W matematyce systemy formalne służą do ścisłego definiowania pojęć i przeprowadzania dowodów. Dowód twierdzenia polega tu na skonstruowaniu ciągu formuł, z których każda wynika z wcześniejszych na podstawie określonych reguł dedukcji, a pierwsze formuły są aksjomatami. Twierdzenie to końcowy wynik takiego ciągu. Zbiór wszystkich twierdzeń możliwych do wyprowadzenia   
z danego zestawu aksjomatów nosi nazwę domknięcia aksjomatycznego względem danego systemu wprowadzania.  
Takie ujęcie matematyki, w którym najważniejsza jest forma zapisu i możliwość przeprowadzania dowodów zgodnie z ustalonymi regułami, określa się mianem formalizmu matematycznego. Badaniem właściwości takich systemów – ich spójności, zupełności czy niezależności aksjomatów – zajmuje się metamatematyka, której twórcą w tym ujęciu był David Hilbert.

Typowy system formalny zawiera następujące składniki:

* Zbiór symboli – skończony alfabet, z którego buduje się formuły systemu.
* Gramatykę – czyli zbiór reguł składniowych, które określają, jakie ciągi symboli tworzą poprawne formuły.
* Aksjomaty – wybrane formuły uznane za początkowe prawdy systemu, niepodlegające dowodzeniu.
* Reguły wyprowadzania – ścisłe zasady, według których z jednych formuł można uzyskiwać inne.
* Zbiór twierdzeń – formuły, które można uzyskać, zaczynając od aksjomatów   
  i stosując reguły wyprowadzania.

Ważne jest, by odróżniać formułę poprawnie zbudowaną składniowo od twierdzenia – nie każda poprawna formuła jest twierdzeniem systemu. Co więcej, w wielu przypadkach nie istnieje ogólna procedura, która umożliwiałaby automatyczne rozstrzyganie, czy dana formuła jest twierdzeniem.[8]

1. **Twierdzenie Gödla**

Twierdzenie Gödla odnosi się do dwóch przełomowych wyników w dziedzinie logiki matematycznej i metamatematyki: pierwsze z nich znane jest jako twierdzenie o niezupełności, a drugie stanowi jego konsekwencję i często określane jest jako twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności. Oba te twierdzenia zostały sformułowane i udowodnione przez austriackiego logika Kurta Gödla w 1931 roku. Ich znaczenie wykracza poza samą matematykę – uznaje się, że stanowią one negatywną odpowiedź na jeden z kluczowych problemów postawionych przez Davida Hilberta, dotyczący możliwości dowiedzenia niesprzeczności matematyki w jej własnych ramach. W efekcie odkrycia Gödla miały głęboki wpływ na filozofię matematyki, zmieniając sposób, w jaki postrzegamy fundamenty tej nauki. Oprócz tych dwóch twierdzeń Gödel wniósł również istotne rezultaty w teorii modeli i teorii nierozstrzygalności.

* Twierdzenie Gödla o niezupełności – każdy spójny system formalny pierwszego rzędu, który zawiera aksjomaty arytmetyki Peana, musi być niezupełny. Innymi słowy – nie istnieje taki system, który byłby w stanie objąć wszystkie prawdziwe twierdzenia dotyczące liczb naturalnych. Nie oznacza to jednak, że zbiór tych twierdzeń nie istnieje – przeciwnie, chodzi o to, że żaden sformalizowany język nie jest w stanie wygenerować ich wszystkich. W rezultacie zbiór twierdzeń, które da się wyprowadzić w danym systemie, zawsze będzie różnił się od zbioru twierdzeń prawdziwych: będzie albo uboższy [jeśli system jest niesprzeczny], albo bogatszy, ale wtedy niespójny [czyli zawiera sprzeczności]. Twierdzenie Gödla odnosi się nie tylko do samej arytmetyki Peana, lecz także do każdej teorii, która jest od niej co najmniej równie silna, to znaczy zawiera ją jako podzbiór. Chociaż pierwotna wersja twierdzenia nie dotyczy teorii słabszych niż arytmetyka, odkryto później, że również pewne słabsze teorie spełniają podobne warunki niezupełności.

Można oczywiście tak zdefiniować systemy formalne, by twierdzenie Gödla ich nie dotyczyło – jednak wówczas muszą one rezygnować z istotnych własności: nie będą rozstrzygalne, co oznacza, że nie da się dla nich stworzyć algorytmu wnioskowania działającego na maszynie Turinga, ani nawet efektywnie wygenerować ich aksjomatów. Z tego względu, że każdy zbiór skończony jest automatycznie rozstrzygalny, twierdzenie Gödla można interpretować jako dowód, że nie istnieje zupełny i niesprzeczny system aksjomatów arytmetyki – niezależnie od tego, czy zbiór tych aksjomatów jest skończony, czy da się go wyprowadzić w sposób algorytmiczny z jakiegoś skończonego opisu.

* Twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności - twierdzenie to wynika bezpośrednio z poprzedniego. Stwierdza ono, że żadna teoria pierwszego rzędu, która jest niesprzeczna i obejmuje aksjomaty arytmetyki Peana, nie może dowieść swojej własnej niesprzeczności przy użyciu jedynie własnych reguł i aksjomatów. Aby przeprowadzić taki dowód, konieczne byłoby odwołanie się do silniejszego systemu. Jednak również ten nowy, rozszerzony system nie będzie w stanie wykazać własnej niesprzeczności – co prowadzi do nieskończonego łańcucha coraz silniejszych teorii.[9]

1. **Bibliografia**

https://pl.wikipedia.org/wiki/Metamatematyka Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Teoria\_mnogości Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Problemy\_Hilberta Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Teoria\_dowodu Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Teoria\_modeli Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Teoria\_rekursji Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Aksjomat Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Struktura\_matematyczna Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/System\_formalny Data dostępu: 23.05.2025

https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenia\_Gödla Data dostępu: 23.05.2025